



(Đề thi gồm 02 trang)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho các biểu thức $P = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} + 2x - 4}{\sqrt{x} + 2}$, với $x \geq 0, x \neq 4$.

- Rút gọn các biểu thức P và Q .
- Tìm các giá trị của x để $P = Q$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ xy(x^2 + y^2) + 2 = (x+y)^2 \end{cases}$$

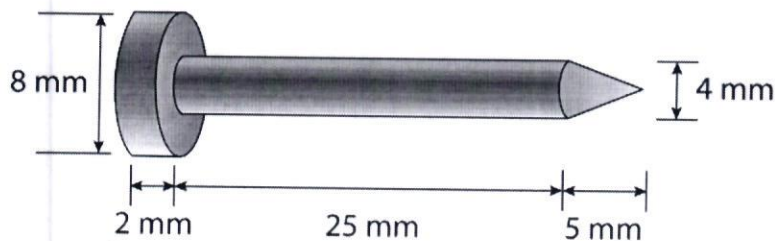
2) Cho đa thức $P(x)$ có bậc 4 và thỏa mãn các điều kiện:

$$P(-1) = 0 \quad \text{và} \quad P(x) - P(x-1) = x(x+1)(2x+1), \forall x \in \mathbb{R}$$

- Chứng minh rằng: $x = 0, x = -2$ là nghiệm của đa thức $P(x)$.
- Tìm tất cả đa thức $P(x)$ thỏa mãn các điều kiện trên.

Câu 3. (1,0 điểm)

a) Thả 10 chiếc đinh không thấm nước có kích thước như hình dưới vào một cốc nước thủy tinh. Đinh chìm hẳn xuống và nước trong cốc không bị tràn ra ngoài. Hỏi thể tích nước trong cốc tăng thêm bao nhiêu ml (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



b) Trên mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho hình chữ nhật $OABC$ sao cho $A(0;3), B(4;3), C(4;0)$. Gọi Ω là tập hợp tất cả các điểm $(x;y)$ với x, y là các số nguyên và nằm bên trong (không kể trên cạnh) của hình chữ nhật $OABC$. Lấy ngẫu nhiên một điểm của tập hợp Ω . Tính xác suất để điểm $(x;y)$ lấy ra thỏa mãn $x + y < 5$.

Câu 4. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , AM cắt (O) tại điểm D (D khác A). Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E (E khác C). Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F (F khác B).

a) Chứng minh rằng tam giác BDF đồng dạng với tam giác CDE ; ba điểm E, M, F thẳng hàng và OA vuông góc EF .

b) Phân giác của góc \widehat{BAC} cắt EF tại điểm N . Phân giác của các góc \widehat{EEN} và \widehat{BFN} lần lượt cắt CN, BN tại P và Q . Chứng minh rằng PQ song song với BC .

Câu 5. (1,0 điểm) Với mỗi số nguyên dương $n > 2$, đặt $S(n)$ bằng tổng tất cả các ước nguyên dương của n .

a) Chứng minh rằng, nếu n là bình phương của một số nguyên tố thì $S(n)$ không thể là số chính phương.

b) Chứng minh rằng nếu n là hợp số thì $S(n) > n + \sqrt{n}$.

Câu 6. (1,0 điểm)

a) Cho 3 số thực $a, b, c > \frac{1}{2}$ thỏa $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{a^2b}{2b-1} + \frac{b^2c}{2c-1} + \frac{c^2a}{2a-1}.$$

b) Một nền nhà hình chữ nhật được lát kín bằng các viên gạch hình chữ nhật kích thước 1×3 và 3 viên gạch chữ nhật kích thước 1×1 . Hỏi có thể lát lại nền nhà ấy chỉ bằng một loại gạch 1×3 hay không? Tại sao?

HẾT